

Devoir du contrôle n°1: Analyse.

Problème . Les parties I, II et III sont indépendantes.

Partie I.

1. Calculer les limites suivantes:

$$(a) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{E(n\sqrt{2})}{n} \quad \text{et} \quad (b) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)}}.$$

Partie II.

On considère les suites réelles (p_n) et (q_n) définies par :

$$\begin{cases} p_0 = 1. \\ q_0 = 1. \end{cases} \quad \text{et } \forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} p_{n+1} = p_n + 2q_n \\ q_{n+1} = p_n + q_n \end{cases}$$

- (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, les nombres p_n et q_n sont des entiers strictement positifs.
(b) Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}$, $p_n \geq q_n$.

2. On définit une suite (u_n) en posant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{p_n}{q_n} \geq 1$

Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n + 2}{u_n + 1}$.

(a) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left| u_{n+1} - \sqrt{2} \right| \leq \frac{\sqrt{2} - 1}{2} \left| u_n - \sqrt{2} \right|$$

(b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left| u_n - \sqrt{2} \right| \leq \left(\frac{\sqrt{2} - 1}{2} \right)^n (\sqrt{2} - 1)$.

(c) En déduire la limite de (u_n) .

(a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $p_{n+2} = 2p_{n+1} + p_n$

(b) Déterminer l'expression du terme général de la suite (p_n) .

(c) En déduire que $p_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2} (1 + \sqrt{2})^{n+1}$.

3. Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}, q_{n+2} = 2q_{n+1} + q_n$, on admet que l'on pourrait montrer de la même manière que $q_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{2}} (1 + \sqrt{2})^{n+1}$. Retrouver alors la limite de (u_n) .

Partie III.

On considère la suite réelle (v_n) définie par:

$$v_0 = \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \frac{1}{2} \left(v_n + \frac{2}{v_n} \right).$$

4. Dresser le tableau de variation de la fonction $f(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{2}{x} \right)$ sur $[\sqrt{2}, 2]$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{2} \leq v_n \leq 2$.
5. Etudier la monotonie de (v_n) (on pourra étudier le signe de $(f(x) - x)$).
6. Conclure que (v_n) est convergente et calculer sa limite.